



**CISTER**

Research Centre in  
Real-Time & Embedded  
Computing Systems

# Technical Report

---

**Interpretação geométrica da região de eficiência do canal de algoritmos de acesso múltiplo com detecção da portadora**

**Ramiro Robles**

---

CISTER-TR-190707

2019

# Interpretação geométrica da região de eficiência do canal de algoritmos de acesso múltiplo com detecção da portadora

Ramiro Robles

CISTER Research Centre

Polytechnic Institute of Porto (ISEP P.Porto)

Rua Dr. António Bernardino de Almeida, 431

4200-072 Porto

Portugal

Tel.: +351.22.8340509, Fax: +351.22.8321159

E-mail: [rasro@isep.ipp.pt](mailto:rasro@isep.ipp.pt)

<https://www.cister-labs.pt>

## Abstract

Este artigo apresenta uma nova interpretação geométrica da análise da região de eficiência do canal de uma classe de algoritmos de acesso aleatório baseado na detecção da portadora. Convencionalmente, a análise e otimização de este tipo de algoritmo está limitado a cenários com terminais que são estatisticamente idênticos. Em cenários com terminais que não são estatisticamente idênticas (cenário assimétrico), a métrica mais utilizada é a região de eficiência de ocupação de canal. Devido a complexidade de este tipo de estudo, a análise da região de eficiência é menos frequente na literatura e por tanto há ainda muitos aspetos por investigar e conhecer a fundo. Este tipo de análise é relevante para o desenho de redes sem fio de área local que estão a proliferar como a tecnologia dominante de acesso a Internet dentro de edifícios. Neste artigo abordamos o problema do cálculo da região de eficiência utilizando ferramentas de otimização multiobjectivo. Isto permitira-nos fazer uma interpretação geométrica de grande utilidade para trabalhos posteriores de redes sem fios. Demonstrasse neste artigo que a região de eficiência de canal de uma classe de algoritmos de detecção de portadora de acesso aleatório descreve-se por uma família de equações quadráticas cujas propriedades estão diretamente relacionadas com as propriedades e parâmetros do sistema de comunicação como a taxa de transmissão e a taxa de detecção de portadora.

# Interpretação Geométrica da Região de Eficiência de Ocupação do Canal de Algoritmos de Acesso Múltiplo com Detecção da Portadora

Ramiro Sámano-Robles

Research Centre in Real-time and Embedded Computing Systems, Porto, Portugal

email :rasro@isep.ipp.pt

*Abstract*—Este artigo apresenta uma nova interpretação geométrica da análise da região de eficiência de ocupação de canal de uma classe de algoritmos de acesso aleatório baseado na detecção da portadora (ou CSMA pelo seu nome em inglês). Convencionalmente, o análise e otimização de este tipo de algoritmo esta limitado a cenários com terminais que são estatisticamente idênticas. Em cenários com terminais que não são estatisticamente idênticas (cenário assimétrico), a métrica mais utilizada é a região de eficiência de ocupação de canal. Devido a complexidade de este tipo de estudo, a análise da região de eficiência é menos frequente na literatura e por tanto há ainda muitos aspetos por investigar e conhecer a fundo. Este tipo de análise é relevante para o desenho de redes sem fio de área local (ou WLAN pelo seu nome em inglês) que estão a proliferar como a tecnologia dominante de acesso a Internet dentro de edifícios. Neste artigo abordamos o problema do cálculo da região de eficiência de ocupação de canal de sistemas com dois terminais utilizando ferramentas de otimização multiobjectivo. Isto permitira-nos fazer uma interpretação geométrica de grande utilidade para trabalhos posteriores de redes sem fios. Demostrasse neste artigo que a região de eficiência de canal de uma classe de algoritmos de detecção de portadora de acesso aleatório descreve-se por uma família de equações quadráticas cujas propriedades estão diretamente relacionadas com as propriedades e parâmetros do sistema de comunicação como a taxa de transmissão e a taxa de detecção de portadora.

## I. INTRODUCTION

O desenho de sistemas de comunicação é modernos depende de uma grande variedade de ferramentas matemáticas. Por simplicidade, o desenho costuma assumir terminais e canais estatisticamente idênticos. Embora este paradigma continua a ser usado num grande número de redes e sistemas actuais, nestes últimos anos, esta visão esta a começar a mudar. Os sistemas e redes do futuro vão ter que transportar uma grande variedade de tipos de tráfego com diferentes níveis de qualidade de serviço e latência. Na vida real, as terminais encontram-se a diferentes distâncias do estação base, e por tanto experimentam diferentes estados de canal. As ferramentas da geometria oferecem uma excelente base para interpretação de soluções e de estados da rede em cenários assimétricos ou com terminais que são estatisticamente diferentes.

Anteriormente o desenho de rede considerava um número muito limitado de métricas para otimizar. Nas redes do futuro, haverá uma grande variedade de interesses, métricas e aspetos que o desenhador devera considerar [1]. A otimização multiob-

jectivo é um subcampo da teoria da otimização que permite-nos o estudo simultâneo de duas ou mais funções objetivo que podem ter comportamentos diferentes ou em conflito [2]. Neste cenário é comum encontrar que a otimização de um grupo das funções objetivos usualmente leva a degradação do desempenho de outro grupo de funções objetivo. Isto significa que não existe uma única solução que optimize todas as funções objetivo simultaneamente. Para solucionar este problema fazemos uso do conceito de solução Pareto ótima, onde procura-se a solução que otimizasse um grupo de funções objetivo sem necessidade de degradar o desempenho das outras funções objetivas. A solução Pareto pode estar conformada não só de um ponto no espaço de soluções, mas de um número finito ou inclusive infinito de pontos, que também é conhecido como a curva ou a região de fronteira Pareto [2]. Neste artigo identificamos que a fronteira da região de eficiência do canal é idêntica a solução de fronteira Pareto do problema de otimização multiobjectivo das funções de eficiência de ocupação do canal dos dois terminais do sistema. Baseados nos resultados da otimização multiobjectivo, nos é possível fazer uma interpretação geométrica da fronteira da região de eficiência. Demonstramos assim que a região de um algoritmo sem detecção de portadora, que é também conhecido como o algoritmo ALOHA, tem uma região de eficiência não convexa com uma fronteira definida por uma curva quadrática de uma parábola. Também é demonstrado que quando detecção de portadora é utilizado, a fronteira da região tem uma convexidade reduzida e a fronteira muda para ser descrita por uma equação de uma hiperboliza. Também apresentamos o cálculo do tamanho da área das diferentes regiões onde demonstramos que o uso de detecção da portadora não só reduz a convexidade da região, mas também incrementa o tamanho efetivo da área, sendo por tanto benéfico para os algoritmos de acesso aleatório. Na literatura, este tipo de interpretações geométricas de algoritmos de acesso aleatório são escasas.

A organização de este artigo é como segue: Secção II apresenta os detalhes da configuração do sistema . Secção III describe as metricas a utilizar para o análise do sistema. Secção IV contem o procedimento de otimizado multiobjectivo. Secção V tem a interpretação geométrica dos resultados e a caracterização da região de eficiência de canal

do sistema de detecção de portadora. Finalmente, Secção VI apresenta as conclusões do artigo.

## II. DESCRIÇÃO DO SISTEMA E OPERAÇÃO DO ALGORITMO

Consideramos uma rede de acesso sem fios com dois terminais na Figura 1 que estão a utilizar um algoritmo aleatório de transmissão com detecção de portadora. As transmissões estão coordenadas temporalmente em janelas ou “slots”. Ao principio de cada janela ou “slot”, cada usuário deteta o estado de canal e se encontra-o sendo utilizado por outra transmissão decide não transmitir. Quando o canal está livre, o usuário transmite com probabilidade  $p_j$ . Neste artigo assumimos que os terminais sempre têm pacotes prontos a ser transmitidos. Esta suposição também é conhecido como o modelo de sistema dominante. Portanto o tráfego no sistema estará a ser controlado pelo experimento aleatório de Bernoulli com parâmetro  $p_j$ .

O tamanho de cada pacote transmitido pelos terminais é  $L$  unidades ou  $L$  slots. Isto significa que a operação de detecção e levada a cabo ate  $L$  vezes ao longo da duração de um pacote. Neste artigo assumimos que esta operação é feita sem imperfeições. Num cenário realista, os problemas de terminal exposta e de terminal oculta podem degradar a eficiência do mecanismo de detecção de portadora. No caso de colisão de pacotes dos terminais consideramos que todos os pacotes são perdidos (modelo de colisão). A variável aleatória  $l$  será utilizada para denotar a longitude de um intervalo de transmissão, e  $E[\cdot]$  denotará o operador de média estatística.

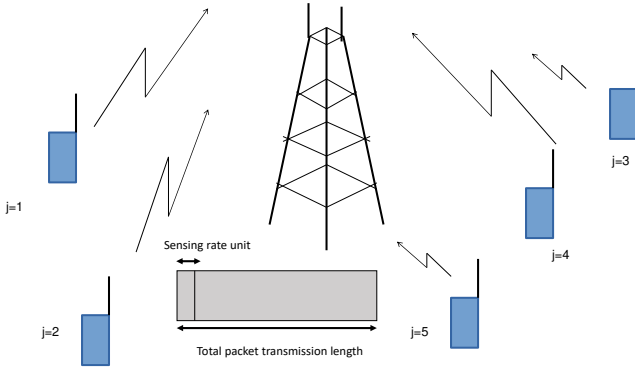


Fig. 1. Rede de acesso aleatório com detecção de portadora.

## III. MÉTRICAS

A eficiência do canal pode definir-se como o cociente do número médio de “slots” com pacotes corretamente transmitidos e a duração média de uma transmissão no sistema [4]:

$$\rho_1 = \frac{LS_1}{E[l]} = \frac{Lp_1\bar{p}_2}{L + \bar{L}\bar{p}_1\bar{p}_2}, \quad (1)$$

$$\rho_2 = \frac{LS_2}{E[l]} = \frac{Lp_2\bar{p}_1}{L + \bar{L}\bar{p}_1\bar{p}_2}, \quad (2)$$

onde  $(\cdot) = 1 - (\cdot)$  é o operador de complemento a unidade. Isto significa que  $\bar{L} = 1 - L$ ,  $\bar{p}_1 = 1 - p_1$  e  $\bar{p}_2 = 1 - p_2$ .

Nestas expressões o numerador é dado pela probabilidade de transmissão de pacote sem colisão de cada terminal, e o denominador indica a longitude média de um intervalo de transmissão com ou sem presença de transmissões. No caso geral com  $J$  terminais, a expressão de eficiência de canal escreve-se de esta forma:

$$\rho_j = \frac{Lp_j \prod_{k=1; k \neq j}^J \bar{p}_k}{L + \bar{L} \prod_{k=1}^J \bar{p}_k}.$$

A região da eficiência do canal pode ser descrita como a região onde todos os valores de eficiência dos dois terminais existem [5]:

$$C_\rho = \{\rho_j | 0 < p_j < 1\}. \quad (3)$$

Esta expressão denota todos os valores de eficiência  $\rho_j$  que existem para todos os possíveis valores de probabilidade de transmissão  $p_j$ .

## IV. OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJECTIVO

A simultânea otimização das duas métricas de eficiência do canal em (2) pode ser expressada de esta forma:

$$\{p_1, p_2\}_{opt} = \arg \max_{p_1, p_2} [\rho_1 \quad \rho_2]. \quad (4)$$

Por meio do método de escalarização, o problema de otimização multiobjectivo pode transformar-se num problema de otimização de uma simple função objetivo [2]:

$$\{p_1, p_2\}_{opt} = \arg \max_{p_1, p_2} \rho_1 + \mu \rho_2, \quad (5)$$

onde o parâmetro  $\mu$  determina o peso relativo da segunda função objectivo no problema de optimização. Tirando a derivada com respeito as duas probabilidades de transmissão e resolvendo para o parâmetro  $\mu$  obtemos o seguinte determinante Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \partial \rho_1 / \partial p_1 & \partial \rho_1 / \partial p_2 \\ \partial \rho_2 / \partial p_1 & \partial \rho_2 / \partial p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Utilizando as propriedades dos determinantes é possível escrever uma versão modificada dos elementos do determinante Jacobiano em (6):

$$\frac{E[l]^2}{S_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial p_j} = \frac{1}{S_k} \left( E[l] \frac{\partial S_k}{\partial p_j} - S_k \frac{\partial E[l]}{\partial p_j} \right). \quad (7)$$

Considere agora a derivada do termo  $S_j$  no numerador das expressões de eficiência do canal em (2):

$$\frac{\partial S_k}{\partial p_j} = \begin{cases} L\bar{p}_n & k = j, n \neq k \\ -Lp_k & k \neq j \end{cases}$$

substituímos agora esta expressão do elemento genérico do determinante Jacobiano em (7) e obtemos [7]:

$$\frac{E[l]^2}{S_k} \frac{\partial \rho_j}{\partial p_k} = \begin{cases} \frac{E[l]}{S_j} - \frac{\partial E[l]}{\partial p_j} & k = j \\ \frac{E[l]}{1-p_j} - \frac{\partial E[l]}{\partial p_j} & k \neq j \end{cases}. \quad (8)$$

Utilizando as propriedades dos determinantes o determinante Jacobiano em (8) pode expressar-se como uma soma:

$$\sum_{j=1}^J \left\{ \frac{E[l]}{1-p_j} - \frac{\partial E[l]}{\partial p_j} \right\} = E[l]. \quad (9)$$

Substituindo a forma explicita do termo  $E[l]$  na expressão anterior obtemos a forma final da curva de soluções Pareto e que descreve a fronteira da região de eficiência de ocupação de canal:

$$Lp_1 + Lp_2 = L + \bar{L}\bar{p}_1\bar{p}_2. \quad (10)$$

## V. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Considere agora o cociente das duas expressões de eficiência em (1) and (2):

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1\bar{p}_2}{p_2\bar{p}_1}, \quad (11)$$

que pode modificar-se a forma seguinte:

$$p_1p_2 = \frac{p_1\rho_2 - p_2\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (12)$$

Podemos substituir este produto nas expressões (10) é em (2), o que resulta nas seguintes expressões lineares:

$$p_1(L\rho_2 - \rho_1) + p_2(-L\rho_1 + \rho_2) = \rho_2 - \rho_1 \quad (13)$$

e

$$-p_1(L\rho_1 + L) + p_2(L\rho_2 + L) = \rho_2 - \rho_1. \quad (14)$$

De estas duas expressões obtemos os valores das duas probabilidades de transmissão:

$$p_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2 + 1}{\bar{L}(\rho_1 + \rho_2) + L + 1} \quad (15)$$

e

$$p_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1 + 1}{\bar{L}(\rho_1 + \rho_2) + L + 1} \quad (16)$$

Substituindo as expressões de (15) and (16) em (12) resulta em:

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho_1 - \rho_2 + 1)(\rho_2 - \rho_1 + 1)}{(\bar{L}(\rho_1 + \rho_2) + L + 1)} \\ &= \frac{\rho_2(\rho_1 - \rho_2 + 1) - \rho_1(\rho_2 - \rho_1 + 1)}{(\rho_2 - \rho_1)} \end{aligned}$$

e simplificando finalmente resulta em:

$$\bar{L}(\rho_1 + \rho_2)^2 + 2L(\rho_1 + \rho_2) - L = (\rho_2 - \rho_1)^2 \quad (17)$$

Fazendo a seguinte uma rotação ortogonal  $x = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\sqrt{2}}$   $y = \frac{\rho_2 + \rho_1}{\sqrt{2}}$  expressão anterior torna-se:

$$\bar{L}y^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}Ly - 2L = x^2 \quad (18)$$

que pode identificar-se como uma equação quadrática de hiperboliza. Notasse que quando o parâmetro  $L$  tem o valor  $L = 1$ , o sistema degradasse ate o sistema ALOHA, e anterior expressão fica:

$$\frac{4}{\sqrt{2}}y - 2 = x^2 \quad (19)$$

que pode identificar-se como a equação de uma parábola. Considere agora a derivada da expressão (18) com respeito da variável  $x$ :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\frac{2}{\sqrt{2}}L + y\bar{L}} \quad (20)$$

Note-se que quando o valor de  $L$  é muito grande ( $L \rightarrow \infty$ ) valor da derivada tende a zero. Isto indica que a convexidade da região se reduz a zero. Isto reforça com a ideia que a eficiência do mecanismo de deteção de portadora incrementa-se com o aumento do tamanho da transmissão respeito da frequência do mecanismo de deteção de portadora. Este resultado também sugere que a área da região de eficiência incrementa-se. Para comprovar esta ideia, considere uma versão modificada da expressão em (18):

$$c(y + b)^2 = x^2 + a \quad (21)$$

onde  $c = \bar{L}b = \frac{2L}{\bar{L}\sqrt{2}}$   $a = 2L - b^2$ , que também pode ser escrita assim:

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + a}}{\sqrt{c}} + b \quad (22)$$

Podemos obter a área da região por meio da integral de esta expressão e considerando os limites de fronteira do problema no sistema cartesiano original:

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{x=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dx - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{a - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| \right] + bx - 1 \end{aligned}$$

Note-se que quando  $L \rightarrow \infty$  the value of the area tends to  $A = 0.5$ , which means the area becomes a triangle. No caso particular com  $L = 1$  a integral da expressão em (19) fica assim:

$$A = 2 \int_{x=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x^2 + 2) \frac{\sqrt{2}}{4} dx - 1 = \left( \frac{w^3}{3} + 2w \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \right) - 1$$

Os resultados da área para distintos valores de  $L$  são mostrados na figura 1. é evidente então que o mecanismo de deteção de portadora incrementa a área da região da eficiência e também reduz não convexidade da região, por tanto melhorando o desempenho de algoritmos de acesso aleatório.

Fig. 2 mostra o efeito do mecanismo de deteção de portadora na estrutura da região de eficiência de canal de algoritmos de aceso aleatório. Note-se que o tamanho da região incrementasse com valores mais elevados do parâmetro  $L$ . Isto confirma os resultado teóricos demostrados nas secções anteriores.

## VI. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste artigo abrem a porta para uma interpretação geométrica das métricas de sistemas mais complexos de comunicação. Esta interpretação geométrica pode gerar novas ideias e clarificar as complexas relações entre métricas, parâmetros e constrições dos sistemas. Além disto, a geometria pose uma grande variedade de ferramentas que podem ser uteis para otimização de grandes sistemas de comunicações futuros como o 5G e internet das coisas.

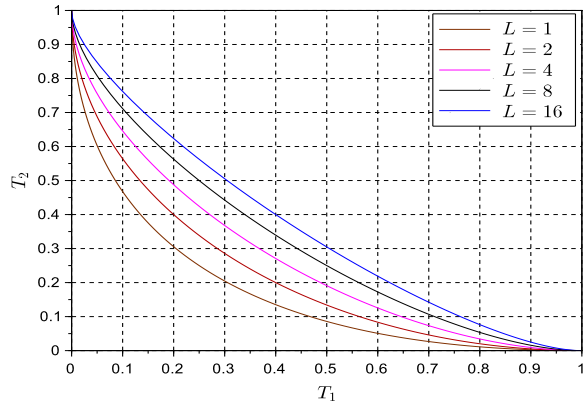


Fig. 2. Região de eficiência de canal para algoritmo de detecção de portadora com dois terminais e diferentes valores do parâmetro  $L$ .

## REFERENCES

- [1] E. Bjornson, E. A. Jorswieck, M. Debbah and B. Ottersten, "Multiobjective Signal Processing Optimization: The way to balance conflicting metrics in 5G systems," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, no. 6, pp. 14-23, Nov. 2014.
- [2] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] R. Samano-Robles, and A. Gameiro, "Multi-Objective and Financial Portfolio Optimization of  $p$ -Persistent Carrier Sense Multiple Access Protocols with Multi-Packet Reception" Chapter in *Communications in Computer and Information Science, Optimization in the Natural Sciences*. 2015, Volume 499, pp 68-94.
- [4] R. Bruno, M. Conti, and E. Gregori, "Optimization of Efficiency and Energy Consumption in  $p$ -Persistent CSMA-Based Wireless LANs," *IEEE Transactions on Mobile Computing*, Vol. 1, No. 1, pp 10-31, 2002.
- [5] J. Luo and A. Ephremides "On the throughput, capacity, and stability regions of random multiple access," *IEEE Trans. on Info. Theory*, Vol. 52, No. 6, 2006, pp. 2593-2607.
- [6] R.R. Rao and A. Ephremides, "On the stability of interacting queues in a multiple-access system," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 4, No. 5, 1988, pp. 918-930.
- [7] R. Samano-Robles, M. Ghogho and D.C. McLernon "Wireless Networks with retransmission diversity and carrier sense multiple access," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 57, No. 9, 2009, pp. 3722-3726.